不绝密★ 不启用 **试卷类型：？**

2026 年 [redacted]

Insane, Mysterious, Overwhelming

本试卷已进行去模因处理。

命题人: Gooodpig　审题人: 一直用真名

本试卷共 5 页, 21 题. 全卷满分 180 分 (包括选考题 30 分). 考试用时任意, 但不要熬夜作答.

一、选择题 I: 本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 数据 $1,2,2,3,3,3,\cdots,\underbrace{2026,\cdots,2026}_{2026\text{个}}$ 的标准差 $\sigma=$（　　）

A. $190\sqrt{6}$　　B. $195\sqrt{6}$　　C. $200\sqrt{6}$　　D. $205\sqrt{6}$

2. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AB 中点是 M,$\odot O$ 和正方形 CDC_1D_1 四条边都相切, 且与 C_1D_1 相切于 T,MO 交平面 $A_1B_1C_1D_1$ 于 E,F 为 ET 靠近 T 的四等分点.$\odot O$ 上有动点 P, 直线 MP 交平面 $A_1B_1C_1D_1$ 于 Q, 则 $\dfrac{QF}{QT}$ 的最小值为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

3. 一个体积为 1 的正方体被挖下体积为 $\dfrac{1}{48}$ 的一角, 则切口的表面积最小值为（　　）.

A. $\dfrac{\sqrt[3]{\pi}}{4}$　　B. $\dfrac{\sqrt[3]{\pi}}{6}$　　C. $\dfrac{\sqrt[3]{\pi}}{8}$　　D. $\dfrac{\sqrt[3]{\pi}}{10}$

4. 不考虑空间异构, 烷基$-C_{11}H_{23}$ 的同分异构体个数为（　　）.

A. 1234　　B. 1236　　C. 1238　　D. 1240

5. 已知一个 8×8 的方格表上 8 个塔, 满足每行、每列有且仅有一个塔, 塔仅有平行于方格边界的四个指向, 只能发射激光束攻击它指向的所有方格. 则塔无法攻击的方格至少有（　　）个.

A. 12　　B. 8　　C. 4　　D. 0

6. 复数 z_1,z_2,z_3 的模长相等. 记

$$\Omega=\frac{(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)^2-3z_1z_2z_3(z_1+z_2+z_3)}{z_1^2z_2+z_2^2z_3+z_3^2z_1-3z_1z_2z_3}.$$

则 $3\left|\dfrac{\Omega-z_1}{z_1-z_3}\right|+4\left|\dfrac{\Omega-z_2}{z_2-z_1}\right|+5\left|\dfrac{\Omega-z_3}{z_3-z_2}\right|$ 的最大值为（　　）.

A. $2\sqrt{2}$　　B. $3\sqrt{2}$　　C. $4\sqrt{2}$　　D. $5\sqrt{2}$

7. P 国有 90 个车站, 按顺序为:1 号、2 号、⋯、90 号和若干辆列车, 每辆列车停靠特定若干个车站, 且都停靠 1 和 90 号. 列车必须按照顺序或逆序停靠车站.T 发现对任意两个车站, 总是至少存在一辆列车, 使得它在这两个车站之间不停靠其他车站. 则列车个数的最小值为（　　）.

A. 2024　　B. 2025　　C. 2026　　D. 2027

8. 集合

$$A=\{x\mid \text{存在不为 1 的完全平方数}N\text{使得}N\text{是}x^2-1\text{的因子}\},$$

$$B=\{x\mid \text{存在不为 1 的完全平方数}N\text{使得}N\text{是}x^2+1\text{的因子}\}.$$

以下说法正确的个数是（　　）.

（1）有无穷多正整数属于 A.

（2）有无穷多正整数属于 B.

（3）有无穷多正整数不属于 A.

（4）有无穷多正整数不属于 B.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

二、**选择题 II: 本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。**

9. 设 $\tau(n)$ 为 n 的正因子个数, 以下说法成立的有（　　）

A. 若 $\tau(n)\tau(m)$ 是奇数, 则 $\tau(mn)$ 是偶数.

B. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^2}=\frac{\pi^4}{36}$.

C. 在 $\mathbb{N}^*$ 随机选取 2 个数, 它们的最大公约数为 g, 则 $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{g^2}\right)=\dfrac{\pi^2}{15}$.

D. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau(n)}{2^n}<1.61$.

10. $n\in\mathbb{N}^*, x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$, 则（　　）

A. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i x_i^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i x_i x_j\geqslant 0$.

B. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\gcd(i,j)x_ix_j\geqslant 0$.

C. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{x_ix_j}{(i+j+2026)^{20.26}}\geqslant 0$.

D. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\gcd(i,j)^2x_ix_j\geqslant(\ln 2)x_1^2$.

11. $\Gamma: x^2-y^2=1$ 上有三个不同点 $A,B,C.BC,CA,AB$ 上的高为 AD,BE,CF, 以下说法正确的有（　　）.

A. AD,BE,CF 交于一点, 且该点在 Γ 上.

B. 坐标原点 O 在 $\triangle ABC$ 的内切圆上.

C. 设 $\triangle ABC$ 外接圆 $\odot Q$, 点 A' 满足 $A'B,A'C$ 与 $\odot Q$ 相切, 则 “A' 关于 BC 的对称点在 Γ 上” 是 “Q 在 Γ 上” 的充要条件.

D. $\triangle DEF$ 内两点 M,N 满足 $\angle DEM=\angle NEF,\angle DFM=\angle NFE$. 若 $M\in\Gamma$, 则 MN 和 Γ 相切.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$,

$$a_{i+1}=-\frac{14a_i^2+36a_i+21}{8a_i^2+20a_i+11}, i\in\mathbb{N}.$$

则 $a_n=$ ______ .

13. 定义在 $[0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f'(0)=1, f(0)=0$，且对任意 $x\geqslant 0$，有

$$f''(x)+\left(1-\frac{1}{2x+2\sqrt{x}}\right)f'(x)\geqslant 0.$$

设 M 为使 $f(x)<M$ 恒成立的最小实数，则 M 的最小值为 ______

14. $\triangle ABC$ 内心, 外心, 垂心是 I,O,H, $|\overrightarrow{IH}|=\frac{\sqrt{14}}{9}$, $|\overrightarrow{IH}-\overrightarrow{OI}|=1$, $|\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{OI}|=4$, 则 $\triangle ABC$ 的周长与面积之比为 ______

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)
$a_0,a_1,a_2,\cdots$ 满足 $a_0=0, a_1=\sin 1$,

$$(n+2)a_{n+2}-2\cos 1a_{n+1}+\frac{a_n}{n+1}=0.$$

(1) 求 a_n.

(2) 求 $\sum_{k=0}^{\infty}a_n$.

16. (15 分)
$\triangle ABC$ 的三边 a,b,c 对应角 A,B,C, 且

$$\begin{cases}ab(1-\cos C)\geqslant 2,\\ bc(1-\cos A)\geqslant 2,\\ ca(1-\cos B)\geqslant 2.\end{cases}$$

(1) 如果 $ab=2$, 求 $S_{\triangle ABC}$ 取值范围.

(2) 设 $\triangle ABC$ 周长是 P, 内切圆半径是 r, 旁切圆半径是 r_a,r_b,r_c. 证明:

$$\left(\left(\frac{rP}{2r_a}\right)^2+1\right)\left(\left(\frac{rP}{2r_b}\right)^2+1\right)\left(\left(\frac{rP}{2r_c}\right)^2+1\right)\leqslant\left(\left(\frac{P}{6}\right)^2+1\right)^3.$$

17. (15 分)
设 $\|x\|$ 表示与 x 最近的整数到 x 的距离.

(1) 证明: 对任意正整数 N, 存在正整数 $n \leqslant N$, 使得 $\|\sqrt{2}n\| < \frac{1}{N}$.

(2) 证明: 存在正整数 N, 对任意正整数 $n > N$, 使得

$$\mathrm{e}^{\frac{n}{5}} < (1+\|\pi\|)(1+\|2\pi\|)\cdots(1+\|n\pi\|) < \mathrm{e}^{\frac{2n}{9}}.$$

18. (17 分)

已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$，$A,B,C \in \Gamma$ 满足：$\forall P \in \Gamma, P \neq A,B,C$,

$$C_{\triangle ABP}, C_{\triangle BCP}, C_{\triangle CAP} < C_{\triangle ABC}.$$

(1) 证明：AB 上的点到 F_1,F_2 距离之和的最小值不随 A,B,C 变化而变化，求出这个最小值.

(2) 求 $C_{\triangle ABC}$ 的取值范围.

19. (17 分)

三棱锥 $P-ABC$ 内一动点 Q 满足: 过 Q,A,B,C 四点的球 O 与 PA,PB,PC 相切于 A,B,C.

(1) PQ 交球 O 于另一点 R，交平面 ABC 于点 S，$QT \perp$ 平面 ABC 交 OS 于点 T. 证明：Q 运动时, 直线 RT 经过一个定点.

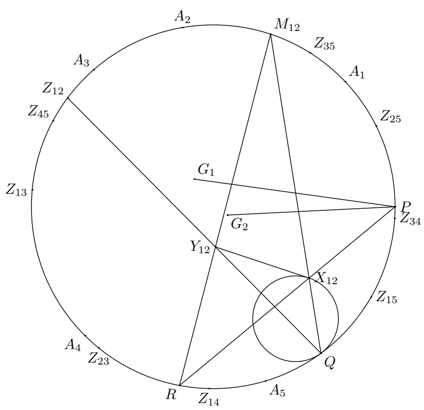
(2) QA,QB,QC 交过 A,B,C 三点（但不过 Q 点）的球 O_1 于另外三点 A_1,B_1,C_1. 证明：直线 PQ 经过 $\triangle A_1B_1C_1$ 的外接圆圆心.

五、选考题: 本题共 3 小题，共 30 分。。

20. [选修 4-6: 初等数论初步](15 分) 证明: 对于任意正整数 n, 存在无穷多正偶数 x, 使得存在 $2n$ 个互不相同的素数 $p_1,p_2,\cdots,p_n,q_1,q_2,\cdots,q_n$,

$$x = p_1+q_1 = p_2+q_2 = \cdots = p_n+q_n.$$

21. [选修 4-5: 不等式选讲](15 分) 五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 内接于圆 $\Omega.P,Q,R$ 是 Ω 上的动点. 对于 $1 \leqslant i < j \leqslant 5$,$M_{ij}$ 是 $\overset{\frown}{A_iA_j}$ 的中点,X_{ij},Y_{ij} 是 $M_{ij}Q,M_{ij}R$ 上的点,R,X_{ij},P 共线, 且存在圆 ω_{ij} 与 Ω 相切于 Q, 和 $X_{ij}Y_{ij}$ 相切于 $X_{ij}.QY_{ij}$ 交 Ω 于 $Z_{ij} \neq Q$. 设 G_1 是 $A_i(1 \leqslant i \leqslant 5)$ 组成的五边形的重心,G_2 是 $Z_{ij}(1 \leqslant i < j \leqslant 5)$ 组成的十边形的重心. 证明:$2PG_1 > PG_2$.



21 题